Методи оптимального керування сталими процесами

Вступ

У практичній діяльності часто зустрічаються задачі оптимізації, у яких змінні стану та керування не залежать від часу. Такі задачі називаються *статичними*. Розв’язок статичної задачі оптимізації забезпечує знаходження незалежних змінних, оптимальних, з погляду якихось прийнятих умов. Прикладами статичних задач оптимізації можна назвати:

- задачі вибору сталих режимів технологічних процесів;
- задачі оперативного керування, зокрема розподілу матеріальних і енергетичних ресурсів, планування ремонтів і перевезень (оптимальний розподіл і планування);
- задачі вибору оптимальних параметрів окремих виробів, настройок регуляторів САР (оптимальне проектування), та ін.

Математичною основою розв’язання таких задач є методи оптимізації функцій.

Ціль навчального посібника – ознайомлення з методикою формалізації оптимізаційних задач і способами їх розв’язання.

Основна увага приділяється методам і алгоритмам, які використовуються в інженерній практиці при дослідженні, проектуванні, експлуатації, аналізі функціонування технічних об’єктів і систем. Головним чином розглядаються методи оптимізації, орієнтовані на розв’язок задач з неперервними змінними, обмеженнями і з однією дійсною цільовою функцією, тобто математичні методи, часто об’єднувані в рамках теорії нелінійного і лінійного програмування.

Робота методів і алгоритмів проілюстрована великою кількістю числових прикладів.

Розглянуто приклади використання методів оптимізації в задачах ідентифікації і оптимізації технологічних процесів, оптимізації настройок систем керування, побудови функціонально адаптивних систем регулювання.

В посібнику наведено приклади і вправи, які рекомендується використовувати при самостійній роботі, а також задачі, які допоможуть викладачу при проведенні семінарських занять і розробці завдань для самостійної роботи студентів.

1. Постановка задач статичної оптимізації. Класифікація методів оптимізації функцій

1.1. Основні поняття та визначення

У будь-якій задачі статичної оптимізації доводиться оперувати наступними основними елементами. По-перше, наборами незалежних змінних (керуючих параметрів) u_i (i=1,2,…,m), які утворюють m-мірний вектор незалежних змінних $\vec{u}$. По-друге, наборами залежних змінних (вихідних величин) $y_i\left(i=1,2,...n\right)$, які утворюють n-мірний вектор залежних змінних $\vec{y}$, до того ж вважаючи, що матриця спостерігача C у виразі $\vec{y} = C \cdot \vec{x}$, де $\vec{x}$ – вектор змінних стану, є одиничною, будемо надалі оперувати з n-мірним вектором $\vec{x}$. По-третє, деяким функціональним виразом I, що включає в себе розглянуті змінні, і повинен бути мінімізований або максимізований. Цей вираз називають *цільовою функцією* (функцією мети), *критерієм оптимальності* або *показником якості* і записують у вигляді:

$$I = f_0(\vec{x},\vec{u}). \tag{1.1}$$

Цільова функція є скалярною мірою ефективності знайденого розв’язку задачі.

Постановка будь-якої задачі оптимізації включає в себе умови, які характеризують прийнятні значення змінних, і називаються обмеженнями задачі. Обмеження містять у собі рівняння зв'язку між залежними та незалежними змінними у вигляді рівнянь а також функціональні та параметричні обмеження у вигляді нерівностей. Обмеження у вигляді рівнянь записуються в такий спосіб:

$$f_j(\vec{x},\vec{u}) = 0, \quad j = 1,2,...,m_1. \tag{1.2}$$

Аналогічно, обмеження у вигляді нерівностей мають вигляд:

$$G_j(\vec{x},\vec{u}) \le 0, \quad j = m_1+1,...,m_2. \tag{1.3}$$

Будь-яке обмеження у вигляді нерівності за допомогою введення додаткової змінної z_j можна звести до еквівалентного обмеження типу рівняння: $G_j(\vec{x},\vec{u}) + z_j^{\,2} = 0$.

З урахуванням вищесказаного, задачу статичної оптимізації можна сформулювати в такий спосіб: мінімізувати (або максимізувати) критерій (1.1)

$$I = f_0(\vec{x},\vec{u}) \to \min_{\vec{u}}(\vec{x},\vec{u}), \tag{1.4}$$

за умови:

$$f_j(\vec{x},\vec{u}) = 0, j = 1,2,...,m_1,$$

$$G_j(\vec{x},\vec{u}) \le 0, j = m_1+1,...,m_2,$$

скорочено можна записати:

$$I_{\min} = \min_{\vec{u}}\left\{ f_0(\vec{x},\vec{u}) \mid f_j(\vec{x},\vec{u}) = 0,\ j = 1,...,m_1;\ \ G_j(\vec{x},\vec{u}) \le 0;\ j = m_1+1,...,m_2 \right\}. \tag{1.5}$$

Іноді зустрічається інший вигляд запису постановки задачі:

$$I = f_0\left(\vec{x},\vec{u}\right) \to \min_{u}; \quad \vec{x} \in D_x, \quad \vec{u} \in D_u, \tag{1.6}$$

де D_x і D_y – області допустимих розв’язків для змінних $\vec{x}$ і $\vec{y}$ відповідно, що визначаються умовами (1.2), (1.3), тобто:

$$D_x = \left\{ x:\ f_j(\vec{x},\vec{u}) = 0,\ j = 1,...,m_1; G_j(\vec{x},\vec{u}) \le 0;\ j = m_1+1,...,m_2 \right\} \tag{1.7}$$

$$D_u = \left\{ u:\ f_j(\vec{x},\vec{u}) = 0,\ j = 1,...,m_1; G_j(\vec{x},\vec{u}) \le 0;\ j = m_1+1,...,m_2 \right\} \tag{1.8}$$

Необхідно відзначити, що задача мінімізації функції $f_0\left(\vec{x},\vec{u}\right)$ еквівалентна задачі максимізації функції $-f_0\left(\vec{x},\vec{u}\right)$, а обмеження $G_j\left(\vec{x},\vec{u}\right) \le 0$ еквівалентні обмеженням $-G_j\left(\vec{x},\vec{u}\right) \ge 0$. Це дозволяє замість задачі мінімізації розв’язувати задачу максимізації та навпаки.

Розв’язок статичної задачі оптимізації дозволяє визначити оптимальну точку $\left(\vec{x}_{опт},\vec{u}_{опт}\right)$ в області допустимих розв’язків D_x і D_u, у зв'язку з чим задачу статичної оптимізації можна сформулювати трохи інакше: знайти значення незалежних змінних $\vec{u} = \left(u_1,u_2,...,u_m\right)$ і відповідні їм значення залежних змінних $\vec{x} = \left(x_1,x_2,...,x_m\right)$, що забезпечують мінімальне (максимальне) значення критерію оптимальності $f_0\left(\vec{x},\vec{u}\right)$ при виконанні умов (1.2) і (1.3).

Необхідно підкреслити, що в результаті розв’язання статичної задачі оптимізації визначається оптимальна точка у просторі розв’язків $\left(\vec{x}_{опт},\vec{u}_{опт}\right)$, у той час як у випадку динамічної задачі оптимізації визначаються функції від часу $\vec{x}_{опт}(t)$ і $\vec{u}_{опт}(t)$.

В залежності від числа незалежних змінних і наявності або відсутності обмежень розрізняють наступні задачі оптимізації.

Якщо число незалежних змінних (керуючих параметрів) більше одного $(m \ge 2)$, то вона називається *багатопараметричною (багатомірною)* задачею оптимізації, а при $m = 1$ ця задача буде називатись *однопараметричною (одномірною)* задачею оптимізації.

При відсутності обмежень (1.2) і (1.3) задача називається задачею *безумовної оптимізації*, у протилежному випадку – задачею *умовної оптимізації*. Необхідно відзначити, що задачі однопараметричної оптимізації завжди є задачами умовної оптимізації, тому що пошук мінімуму цільової функції здійснюється на деякому інтервалі $\left[u^-, u^+\right]$. Пошук мінімуму цільової функції на нескінченній числовій осі u позбавлений змісту.

Інша класифікація задач, пов'язана із методами їхнього розв'язання, буде наведена далі.

1.2. Приклади формулювання задач оптимізації

Правильному формулюванню сприяє використання стандартної послідовності основних етапів формалізації. Ця послідовність така:

1. Змістовна (словесна) постановка задачі;
2. Введення позначень для змінних (бажано із розмірностями);
3. Запис у прийнятих позначеннях критерію оптимальності, як функції від усіх або частини шуканих змінних;
4. Виділення множини допустимих значень змінних, яку визначають як обмеження, накладені на кожну із змінних (автономні обмеження), і умови, накладені на сукупність змінних. Наявність останніх змушує враховувати при формулюванні задачі не тільки ті змінні, які входять в критерій оптимальності, але всі так чи інакше з ними пов’язані.

Задача 1. Вибір режиму печі

Змістовна постановка задачі.

У печі (рис. 1.1, а) спалюється паливо. Потрібно вибрати такі значення витрат палива і повітря, для яких температура в печі була б максимальною. При конкретному складі палива і стані печі температура визначається їх співвідношенням.

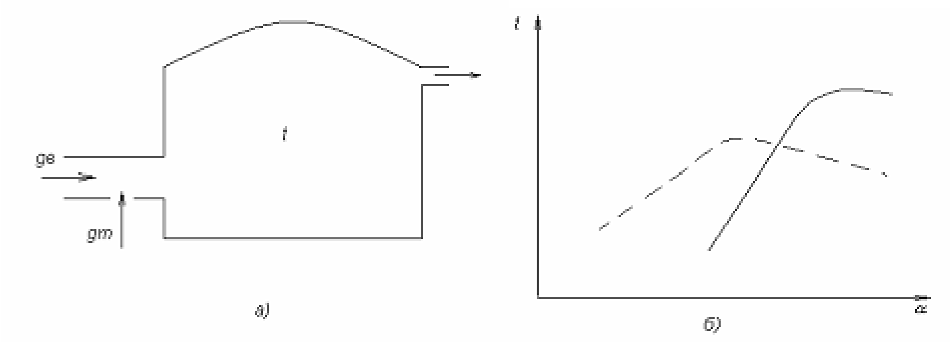

Рис. 1.1. *Спалювання палива у печі*

Введемо позначення: $g_т$ — витрата палива, $g_в$ — витрата повітря. Температуру в печі, що залежить від $g_т, g_в$, позначимо $t = f_0(g_в, g_т)$ (рис. 1.1, б).

Критерій оптимізації:

$$f_0(\alpha) \to \max_{\alpha}, \tag{1.9}$$

Обмеження на змінні величини задачі:

$$g_{т.\ \max} \geq g_т \geq 0; g_{в.\ \max} \geq g_в > 0;\ g_в / g_т \geq \alpha, \tag{1.10}$$

де $g_{т.\ \max}$, $g_{в.\ \max}$ – гранично допустимі значення цих змінних, α – відношення витрати повітря до витрати палива.

Відмітимо відразу, що наведена постановка правильна лише у першому наближенні. В дійсності на вигляд функції f_o впливає цілий ряд факторів не врахованих при постановці задачі. До таких факторів відносяться температура повітря, температура і склад палива, стан пальників. Так що залежність $t = f_o(\alpha)$ може мати різну форму (пунктирна і суцільна лінії на рис. 1.1, б), до того ж деякі з цих факторів практично важко виміряти. Таким чином, мова може йти, наприклад, про максимум математичного очікування f_o при заданих витратах палива і повітря.

Задача 2. Вибір оптимального складу палива

Змістовна постановка задачі.

Тепловій електричній станції (ТЕС) потрібне вугілля із вмістом сірки, не більшим 0,03% і золи - не більшим 3,25%. Маємо три сорти вугілля:

Таблиця 1

Сорт	Вміст сірки	Зольність	Ціна за 1т, грн.
A	0,06	2,0	30
B	0,04	4,0	30
C	0,02	3,0	45

Знайти, в якому співвідношенні потрібно змішати вугілля A, B і C, щоб задовольнити обмеженням на вміст домішок сірки і попелу, та мінімізувати ціну.

Формулювання критерію оптимізації.

Нехай 1 т суміші містить вугілля типу A, B і C відповідно, u_1, u_2 і u_3. Тоді ціна однієї тонни може бути знайдена за допомогою наступного математичного виразу:

$$S = 30 \cdot u_1 + 30 \cdot u_2 + 45 \cdot u_3 \tag{1.11}$$

Критерій оптимальності. *Цільова функція в задачі приймає вигляд:*

$$S(u_1, u_2, u_3) \to \min_{u_1, u_2, u_3} \tag{1.12}$$

Область допустимих розв’язків визначається наступними співвідношеннями:

$$u_1 + u_2 + u_3 = 1, \tag{1.13}$$

$$0,06 \cdot u_1 + 0,04 \cdot u_2 + 0,02 \cdot u_3 \le 0,03 \cdot 10^{-2}, \tag{1.14}$$

$$2 \cdot u_1 + 4 \cdot u_2 + 3 \cdot u_3 \le 3,25 \cdot 10^{-2}. \tag{1.15}$$

Задача 3. Вибір розміщення центрального вузла при прокладці трас

Змістовна постановка задачі.

Задано розміщення деяких споживачів сировини або енергії. Потрібно так вибрати розміщення центрального вузла проміжного джерела, з якого постачають усіх споживачів, щоб сумарна довжина трубопроводів (рис. 1.2) була мінімальною.

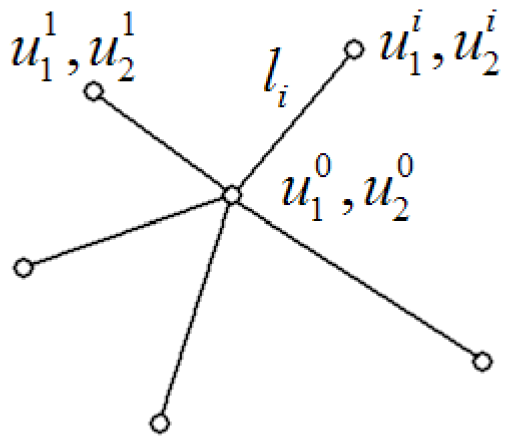

Рис. 1.2. *Схема розміщення центрального вузла і споживачів*

Введення позначень для змінних.

Позначимо через u_1^0 та u_2^0 координати центрального вузла на площині, а через u_1^i, u_2^i координати i-го споживача. Відстань від центрального вузла до i-го споживача l_i можна знайти за допомогою співвідношення:

$$l_i = \sqrt{\left(u_1^0 - u_1^i\right)^2 + \left(u_2^0 - u_2^i\right)^2}. \tag{1.16}$$

Тепер можна записати критерій оптимальності:

$$I = \sum_i l_i = \sum_i \sqrt{\left(u_1^0 - u_1^i\right)^2 + \left(u_2^0 - u_2^i\right)^2} \to \min_{u_1^0, u_2^0} \tag{1.17}$$

Що стосується множини допустимих рішень, то в даному випадку допустимі усі дійсні значення змінних u_1^0 та u_2^0, так як обмеження у задачі відсутні.

Задача 4. Задача оптимального проектування

а). *Змістовна постановка.* Вибрати довжину твірної і діаметр днища циліндра таким чином, щоб при заданому об'ємі загальна довжина зварних швів виявилась мінімальною. При цьому потрібно врахувати, що зварювати доводиться краї зігнутого в циліндр листа по твірній і до отриманої труби приварити днища (рис.1.3).

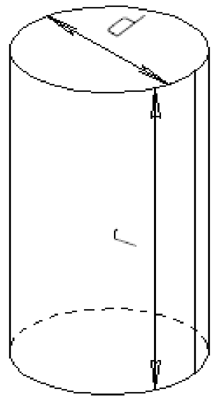

Рис. 1.3. *До задачі оптимального проектування*

Позначення для змінних: l і d – довжина твірних і діаметр циліндра; V – його об'єм.

Критерій оптимальності – загальна довжина зварених швів. У прийнятих позначеннях він запишеться так:

$$I = 2\pi d + l \to \min_{l,d}. \tag{1.18}$$

Множина допустимих розв'язків (будемо називати її множиною D) визначається системою обмежень типу нерівностей і рівнянь:

$$d \geq 0\,;\ l \geq 0\,; \tag{1.19}$$

$$\frac{\pi d^2 l}{4} - V = 0 \tag{1.20}$$

При цьому умови (1.19) накладені автономно на кожну із шуканих змінних, а умова (1.20) пов'язує їх одна з одною.

б). *Змістовна постановка.* Спроектувати ємність, яка має форму циліндра, об'єм якого рівний 20,0 $м^3$. Визначити розміри ємності, при яких вартість його виготовлення мінімальна.

Математичне формулювання. Для оцінки вартості виготовлення знайдемо повну поверхню циліндру, що визначає кількість матеріалу, яка піде на його виготовлення, а також довжину звареного шва.

Тоді вартість ємності можна оцінити за виразом:

$$D = F \cdot a_F + L \cdot a_L \tag{1.21}$$

де F – площа повної поверхні ємності; L – загальна довжина зварних швів; a_F, a_L – вартість одиниці площі матеріалу і вартість виготовлення одиниці зварного шва.

Позначимо висоту циліндру через H, радіус днища – R, які не повинні виходити за деякі рамки:

$$R_{\min} \leq R \leq R_{\max} \tag{1.22}$$

$$H_{\min} \leq H \leq H_{\max} \tag{1.23}$$

У математичному вигляді сформульовану задачу можна записати таким чином:

$$I = F \cdot a_F + L \cdot a_L \to \min_{R,H}, \tag{1.24}$$

$$V = \pi R^2 H = 20\,, \tag{1.25}$$

де V – об'єм ємності.

$$F = 2\pi RH + 2\pi R^2 \tag{1.26}$$

$$L = 2 \cdot 2\pi R + 2H \tag{1.27}$$

$$R_{\min} \le R \le R_{\max} \tag{1.28}$$

$$H_{\min} \le H \le H_{\max} \tag{1.29}$$

Ми отримали математичну модель для знаходження оптимального розв'язку. Вона складається із критерію оптимальності, обмежень типу рівнянь і обмежень типу нерівностей.

Задача 5. Задача оптимального параметричного синтезу регулятора

Змістовна постановка.

Необхідно знайти оптимальні параметри настройок пропорційно-інтегрального регулятора (ПІ-регулятора) для об'єкту першого порядку із запізненням, які б забезпечили мінімальне значення квадратичного інтегрального критерію якості при ступінчатому збуренні по завданню.

Аналіз задачі і введення позначень.

Структурна схема системи автоматичного регулювання зображена на рис. 1.4:

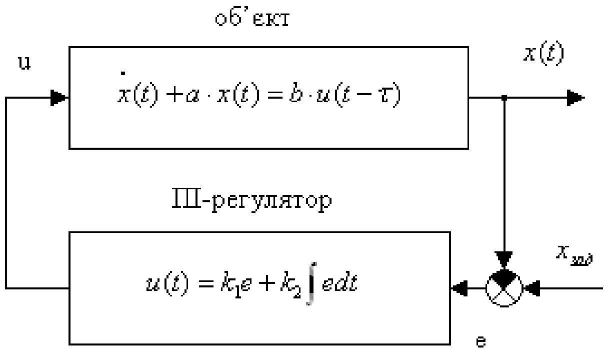

Рис. 1.4. *Структурна схема системи автоматичного регулювання*

Прийняті позначення:

x(t) – вихідна змінна об'єкту регулювання;

u(t) – регулююча змінна (керування);

τ – час запізнення;

a, b – параметри об'єкту;

$e = x_{зад} - x(t)$ – помилка регулювання;

k_1, k_2 – коефіцієнти ПІ-регулятора, які повинні бути знайдені із умов досягнення мінімуму інтегрального критерію оптимізації.

Математична постановка задачі.

Критерій оптимізації має наступний вигляд:

$$I = f_0(x,u) = \int_{t_n}^{t_k} e^2 dt \to \min_{k_1, k_2}. \tag{1.30}$$

Множина допустимих розв'язків повинна задовольняти наступним співвідношенням:

- обмеженню типу рівняння – математичний опис об'єкту регулювання

$$f_1(x,u) = x(t) + a \cdot x(t) - b \cdot u(t-\tau) = 0 \tag{1.31}$$

із граничними умовами:

$$x(t_n) = x_n, \; x(t_k) = x_k, \tag{1.32}$$

де $x(t_n)$, $x(t_k)$ - значення вихідної величини в початковий t_n і кінцевий t_k моменти часу.

- Обмеженню типу рівняння – математичний опис ПІ-регулятора

$$f_2(x,u) = u - k_1 \cdot e + k_2 \int e dt. \quad (1.33)$$

- Обмеженням типу нерівність

$$G_1(u) = u_{\min} - u \le 0; \;\; G_2(u) = u_{\max} - u \ge 0 \quad (1.34)$$

або $u_{\min} \le u \le u_{\max}$, які обумовлені обмеженою пропускною здатністю регулюючого органу.

Оптимальне проектування систем

Під задачею проектування розуміється створення нового об'єкта чи системи, що матимуть задані властивості чи характеристики. Об'єктами проектування можуть бути технічні системи, в тому числі системи автоматичного управління, економічні системи тощо. Основні проблеми, що виникають при рішенні задачі проектування, пов'язані з завданням структури проектованого об'єкта (структурний синтез), а також із вибором параметрів в рамках уже відомої структури (параметричний синтез). Основні вимоги до створюваного об'єкта задаються вектором вихідних величин $\vec{y}$.

Задача проектування об'єкта в ряді випадків може бути представлена як задача рішення системи нерівностей, що називаються специфікаціями. Ця система має такий вигляд:

$$y_i\left(\vec{x}\right) \le t_i, \qquad i = \overline{1,m}, \quad (1.35)$$

де $\vec{x}$ – невідомий вектор параметрів проектування, що підлягає вибору.

Під задачею оптимального проектування розуміють задача отримання вектора $\vec{x}$ з умови

$$\vec{x} = \arg\min_{x} I\left(x\right), \quad (1.36)$$

де $I\left(x\right)$ – деякий критерій оптимальності функціонування системи.

Таким чином, задачу оптимального проектування можна представити як задачу умовної оптимізації (1.36) з обмеженнями типу нерівності (1.35).

1.3. Геометрична інтерпретація задачі статичної оптимізації.

Для наочного зображення задачі і роботи алгоритмів оптимізації використовують геометричну інтерпретацію в площині незалежних змінних.

Нехай задача оптимізації функції $f_o\left(\overline{u}\right)$, яка містить обмеження типу рівнянь і нерівностей має вигляд:

$$I = f_0\left(\vec{u}\right) = \left(u_1 - 2\right)^2 + \left(u_2 - 2\right)^2 \to \min_{\vec{u}}; \quad (1.37)$$

$$f_1\left(\vec{u}\right) = u_1 + u_2 = 1; \quad (1.38)$$

$$G_1\left(\vec{u}\right) = u_1 \le 2; \quad (1.39)$$

$$G_2\left(\vec{u}\right) = u_2 \le 2; \quad (1.40)$$

$$G_3\left(\vec{u}\right) = u_1 \ge 0; \quad (1.41)$$

$$G_4\left(\vec{u}\right) = u_2 \ge 0. \quad (1.42)$$

Цільова функція зображується за допомогою ліній постійного рівня, для побудови яких, наприклад, у площині двох змінних необхідно прирівнювати цільову функцію до одного із обраних постійних значень c_1, c_2, c_3 і т.д. і, задаючи значення однієї незалежної змінної (u_1), визначати значення іншої (u_2).

Графічно це зображується лінією, в окремому випадку замкнутої, у площині незалежних змінних u_1 і u_2 (рис. 1.5).

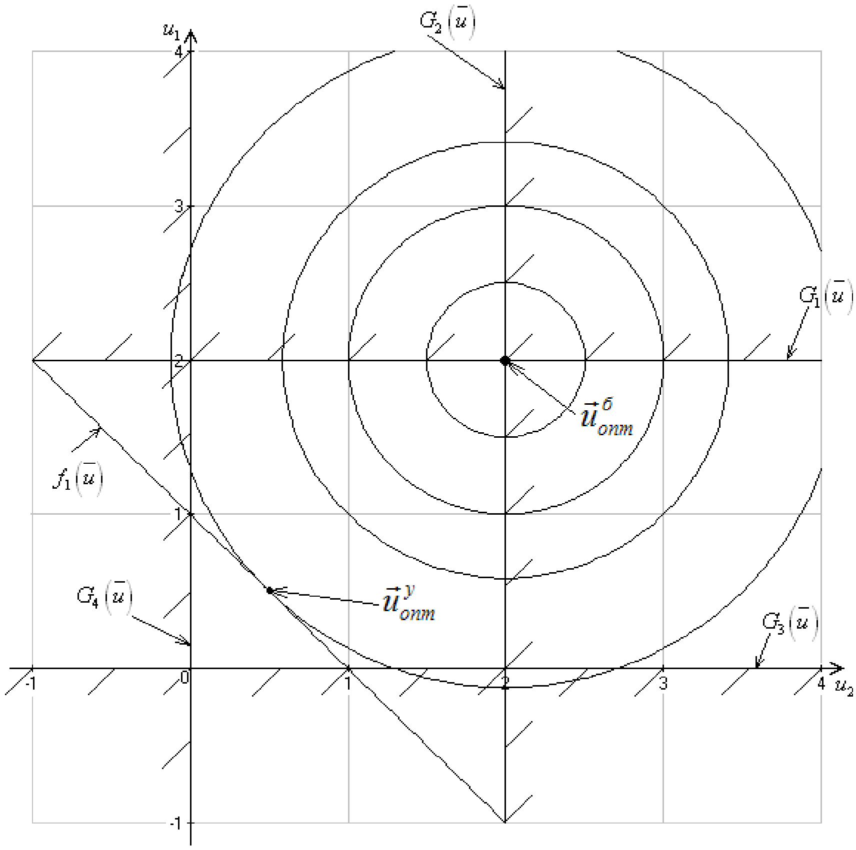

Рис. 1.5. *Графічна інтерпретація задачі (1.37)*

Подібним же чином графічно інтерпретуються й обмеження. Обмеження-рівняння типу (1.2) зображуються лініями, обмеження-нерівності (1.3) позначають області припустимих розв'язків.

На рис. 1.5 області за заштрихованими сторонами ліній $G_j(u_1,u_2)$ відповідають областям недопустимих розв'язків відповідно до умов (1.3). Очевидно, якщо розв'язується задача безумовної оптимізації $\min f_0(\vec{u})$ або задача умовної оптимізації

$$\min\left\{f_0(\vec{u}) \mid G_j(\vec{u}) \le 0,\, j=\overline{1,4}\right\}, \tag{1.43}$$

то розв'язок задачі буде відповідати точці безумовного оптимуму $\vec{u}^{\,б}_{опт}$, і при цьому виконуються співвідношення: $\min f_0(\vec{u}) < c_3 < c_2 < c_1$. Якщо ж розв'язується задача умовної оптимізації

$$\min\left\{f_0(\vec{u}) \mid G_j(\vec{u}) \le 0,\, j=\overline{1,4};\, f_j(\vec{u})=0,\, j=1\right\}, \tag{1.44}$$

тобто з обмеженням типу рівності, то розв'язок задачі буде знаходитися в точці умовного оптимуму $\vec{u}^{\,у}_{опт}$.

Розглянемо інший приклад. Нехай задача оптимізації функції $f_o\left(\bar{u}\right)$, яка містить обмеження типу рівнянь і нерівностей має вигляд:

$$I = f_o\left(\bar{u}\right) = \left(u_1-2\right)^2 + \left(u_2-2\right)^2 \to \min_{u_1,u_2} \tag{1.45}$$

$$f_1\left(\bar{u}\right) = u_1 - 2\cdot u_2 = 0, \tag{1.46}$$

$$G_1\left(\bar{u}\right) = u_1 + u_2 - 2 > 0, \tag{1.47}$$

$$G_2\left(\bar{u}\right) = u_2 - 1 > 0, \tag{1.48}$$

$$G_3\left(\bar{u}\right) = u_2 - 4 < 0, \tag{1.49}$$

$$G_4\left(\bar{u}\right) = u_1 - 5 < 0, \tag{1.50}$$

$$G_5\left(\bar{u}\right) = u_1 > 0. \tag{1.51}$$

Графічну інтерпретацію цієї задачі зображено на рис. 1.6.

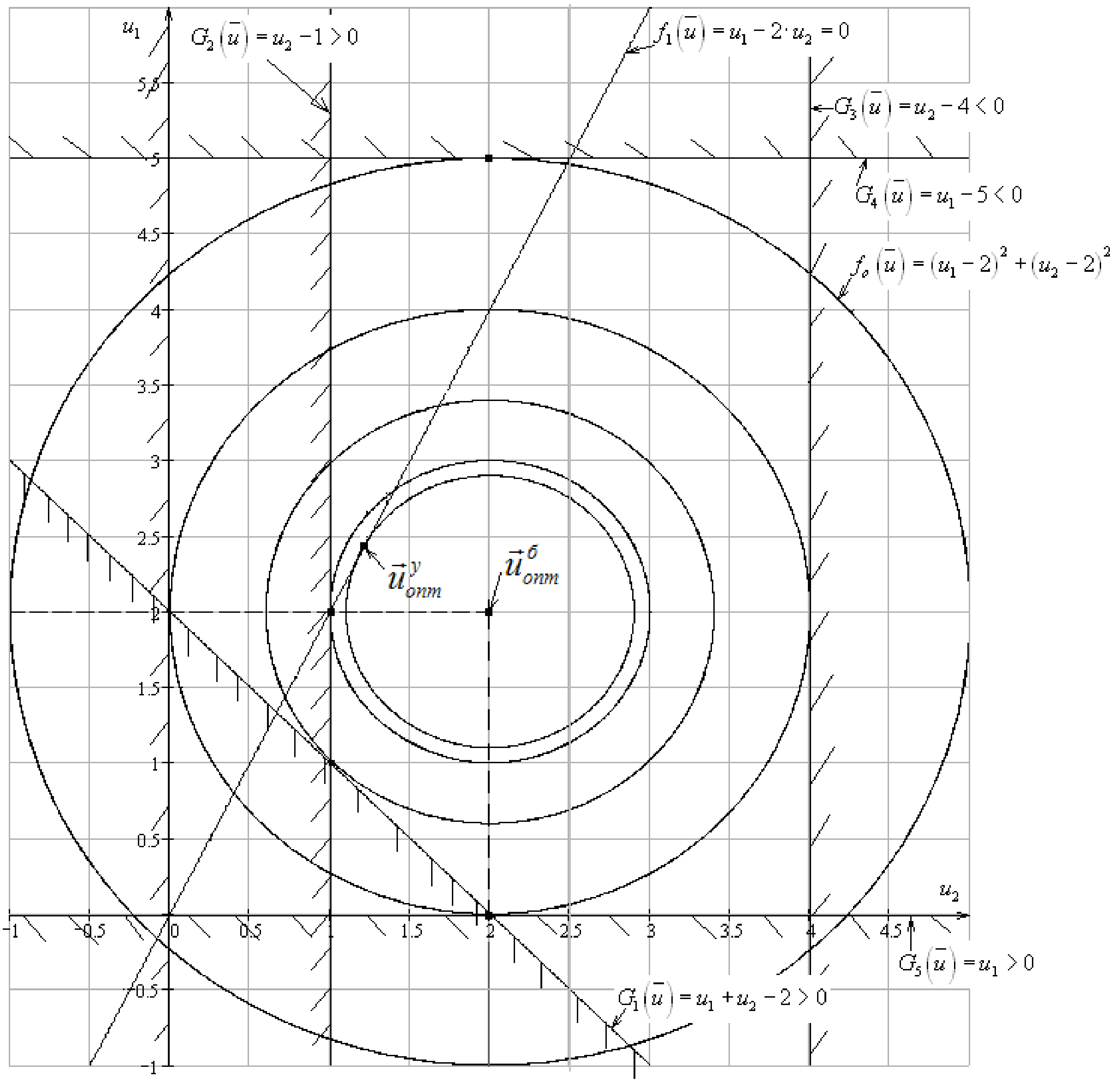

Рис. 1.6. *Графічна інтерпретація задачі (1.45)*

Геометрична інтерпретація задачі доцільна тільки у просторі двох незалежних змінних, тобто при $m = 2$.

1.4. Класифікація методів розв’язання задач оптимізації функцій.

Задачі оптимізації відрізняються великою різноманітністю та складністю, у зв'язку з чим відсутній універсальний метод їхнього рішення.

Усі методи розв’язання оптимізаційних задач можна розбити на дві великі групи: методи класичного аналізу та методи математичного програмування.

Методи, розроблені в класичній математиці, засновані на розв’язанні систем алгебраїчних рівнянь, отриманих при прирівнюванні нулеві частинних похідних досліджуваної функції по оптимізуючих параметрах. Ці методи дозволяють розв’язувати задачі пошуку оптимуму тільки при відсутності обмежень на оптимізовані параметри або при обмеженнях у вигляді рівностей (метод множників Лагранжа).

Методи класичного аналізу застосовують у тому випадку, коли аналітичний вигляд критерію оптимізації й обмежень відомий, і рівняння можна виразити в явній формі.

Область математики, що досліджує питання теорії і методи розв’язання некласичних задач оптимізації, одержала назву *математичного програмування (МП)*.

Ця назва пов'язана із тим, що розв’язання некласичних оптимізаційних задач здійснюється за допомогою визначеної програми дій, тобто алгоритму, що вказує послідовність операцій, у зв'язку з чим ці методи іноді називають також *алгоритмічними*.

Методи МП класифікують відповідно до типів некласичних оптимізаційних задач (задач МП). Виділяють наступні класи методів і задачі МП:

1. <u>*Нелінійне програмування (НП)*</u>. Задача НП повинна мати хоча б одне нелінійне обмеження або нелінійну цільову функцію відносно незалежних змінних $\vec{u}$.

У класі задач нелінійного програмування виділяють задачі квадратичного програмування.

Для розв’язку загальної задачі нелінійного програмування розроблена велика кількість алгоритмів, ефективність роботи яких залежить від природи цільової функції $f_0(\vec{u})$. Всі ці алгоритми можна певним чином класифікувати.

Залежно від постановки задачі оптимізації розрізняють:

1. *Методи безумовної оптимізації.*
2. *Методи умовної оптимізації.*

Залежно від здатності алгоритму шукати локальний або глобальний екстремум розрізняють:

1. *Методи локальної оптимізації.*
2. *Методи глобальної оптимізації.*

Залежно від числа незалежних змінних задачі оптимізації розрізняють:

1. *Методи одномірної оптимізації.*
2. *Методи багатомірної оптимізації.*

Залежно від характерних рис функціонування алгоритму розрізняють:

1. *Методи нульового порядку (методи, які не використовують похідні цільової функції).*
2. *Методи першого порядку (методи, що використовують перші похідні цільової функції).*
3. *Методи другого порядку (методи, що використовують другі похідні цільової функції).*

Необхідно відзначити, що багато алгоритмів нульового і першого порядку при розв’язанні задач багатомірної оптимізації використовують методи одномірної оптимізації, які й будуть розглянуті в першу чергу.

Квадратичне програмування. У задачах квадратичного програмування всі обмеження лінійні, а цільова функція квадратична, тобто має вигляд:

$$f_0(u_1,u_2,...,u_n)=\sum_{i=1}^{m}c_iu_i+\sum_{\substack{i,j=1,\\ i\le j}}u_id_{i,j}u_j \qquad (1.52)$$

або у векторній формі:

$$f_0(\vec{u})=\vec{c}^{\,T}\vec{u}+\vec{u}^{\,T}D\vec{u} \qquad (1.53)$$

де d_{ij} - елементи симетричної матриці D.

2. <u>*Лінійне програмування (ЛП)*</u>. У задачах ЛП всі обмеження і цільова функція є лінійними.

3. <u>*Цілочисельне програмування (ЦП).*</u> У задачах ЦП незалежні змінні приймають тільки цілі значення.

4. <u>*Стохастичне програмування (СП).*</u> У задачах СП вихідна інформація містить елементи невизначеності, або деякі параметри задачі носять випадковий характер.

5. <u>*Геометричне програмування.*</u> У задачах геометричного програмування цільова функція й обмеження є поліноміальними функціями

$$f(\vec{u})=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iu_i^{a_{i1}}u_2^{a_{i2}}...u_m^{a_{im}} \qquad (1.54)$$

Відзначимо, що задачі геометричного програмування є окремим класом задач НП і узагальненням окремого випадку задач НП - задач квадратичного програмування.

Нижче будуть розглянуті методи, що найчастіше застосовуються в інженерній практиці, а саме: нелінійне і лінійне програмування, методи класичного аналізу.

1.5. Основні поняття математичного програмування.

Опуклість є одним з найбільш важливих математичних понять, яке використовується у математичному програмуванні, у зв'язку з тим, що для задач МП особливий інтерес представляють опуклі множини.

Множина точок, що утворюють область D , називається *опуклою*, якщо будь-які дві точки, що належать цій множині, можуть бути з'єднані відрізком прямої лінії, який також цілком належить цій множині.

У математичній формі визначення опуклої множини дається в такий спосіб: точкова множина (множина точок) D_u називається *опуклою*, якщо для будь-яких двох точок $\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2} \in D_u$ будь-яка лінійна комбінація $\overrightarrow{u_1}$ і $\overrightarrow{u_2}$ також відноситься до D_u , тобто

$$\vec{u}^* = \alpha\overrightarrow{u_1} + (1-\alpha)\overrightarrow{u_2} \in D_u,\ 0 \le \alpha \le 1 \qquad (1.55)$$

Останній вираз є формою опису всіх можливих відрізків прямої, що з'єднують $\overrightarrow{u_1}$ і $\overrightarrow{u_2}$. Прикладами опуклих множин є: відрізок, пряма, гіперплощина, куля. На малюнку *1.6* зображені приклади опуклих і не опуклих множин.

Аналогічно визначається поняття опуклої функції. Функція $f(\vec{u})$ є опуклою на опуклій множині D_u , якщо для будь-яких двох точок $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2} \in D_u$,і для усіх α, $0 \le \alpha \le 1$ справедлива формула:

$$f\left[\alpha\overrightarrow{u_1} + (1-\alpha)\overrightarrow{u_2}\right] \le \alpha f(\overrightarrow{u_1}) + (1-\alpha) f(\overrightarrow{u_2}) \qquad (1.56)$$

Якщо в (1.56) буде строга нерівність (тобто знак «<») при $0 \le \alpha \le 1$, то функція $f(\vec{u})$ буде називатися *строго опуклою*.

Якщо в (1.56) знак нерівності змінити на протилежний, то $f(\vec{u})$ буде називатися *увігнутою* (*строго увігнута* при строгій нерівності). Звідси випливає, що якщо $f(\vec{u})$ опукла (строго опукла), то $-f(\vec{u})$ увігнута (строго увігнута).

Для опуклих множин характерно те, що перетин будь-якого числа опуклих множин є опуклою множиною.

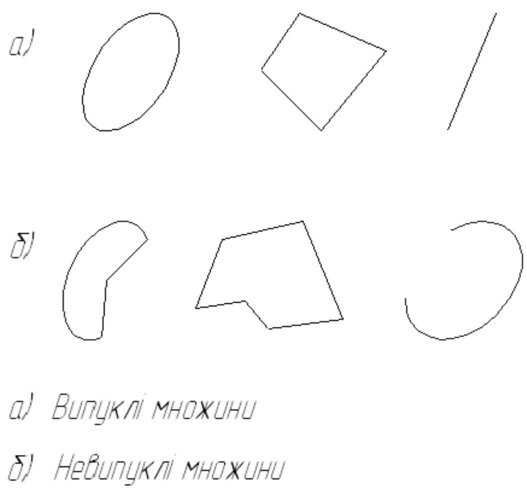

Рис. 1.7. *Випуклі та невипуклі множини*

У зв'язку із введенням поняття опуклості можна доповнити класифікацію методів і задач МП, опуклим програмуванням (ОП). Задача мінімізації опуклої функції $f(\vec{u})$, заданої на опуклій множині D_u, називається *задачею опуклого програмування*. До задач опуклого програмування можуть відноситися задачі як нелінійного, так і лінійного програмування.

Важливою властивістю задач ОП є те, що оптимальний розв'язок задачі досягається у локальному мінімумі, який є, в той же час, і глобальним.

Вектор $\vec{u}^{\,опт}$ називається точкою *локального (відносного) мінімуму* функції $f(\vec{u})$ на множині D_u, якщо при деякому достатньо малому $\varepsilon > 0$ для всіх $\vec{u} \neq \vec{u}^{\,опт}$ і $\vec{u} \in D_u$, що задовольняють умові $|\vec{u} - \vec{u}^{\,опт}| \leq \varepsilon$, виконано нерівність $f(\vec{u}^{\,опт}) \leq f(\vec{u})$, тобто, якщо в ε – околиці точки $\vec{u}^{\,опт}$ функція $f(\vec{u})$ не приймає значення меншого ніж $f(\vec{u}^{\,опт})$.

Вектор $\vec{u}^{\,опт}$ називається точкою *глобального (абсолютного) мінімуму* функції $f(\vec{u})$ на множині D_u, якщо $\vec{u}^{\,опт} \in D_u$ і $f(\vec{u}^{\,опт}) < f(\vec{u})$ для всіх $\vec{u} \in D_u$, $\vec{u} \neq \vec{u}^{\,опт}$, тобто якщо в жодній іншій точці області допустимих рішень (допустимої області) D_u функція $f(\vec{u})$ не приймає значення меншого ніж $f(\vec{u}^{\,опт})$.

Очевидно, що глобальний мінімум – це найменший з усіх локальних мінімумів. Задача оптимізації, у якій цільова функція має в допустимій області один локальний мінімум, називається *одноекстремальною (унімодальною)* задачею оптимізації. Якщо локальних мінімумів декілька, то задача називається *багатоекстремальною (мультимодальною)*. Багатоекстремальні задачі називаються *задачами неопуклого програмування.*

Допустимий розв'язок.

Будь-який розв'язок , тобто будь-який вектор $\vec{u}$, що належить області допустимих розв'язків D_u, яка обумовлена обмеженнями у вигляді рівнянь і нерівностей (1.19) і (1.20), називається д*опустимим розв'язком* задачі оптимізації. Будь-який розв'язок поза D_u називається *недопустимим розв'язком.*

Оптимальний розв'язок (оптимум) є найкращим (мінімальний або максимальний, тобто екстремальний) із усіх допустимих у змісті прийнятої цільової функції.

Якщо локальний оптимум знаходиться на границі допустимої області, то він називається *умовним оптимумом.*

Необхідні і достатні умови оптимальності.

Розглянемо їх для багатомірних задач безумовної оптимізації.

Необхідна умова оптимальності (екстремуму цільової функції): для того, щоб у точці $\vec{u}^{\,опт}$ функція $f(\vec{u})$ мала безумовний локальний екстремум (тобто приймала найменше або найбільше значення), необхідно щоб усі її частинні похідні в точці $\vec{u}^{\,опт}$ дорівнювали нулю:

$$\frac{\partial f(\vec{u})}{\partial u_i}\Big|_{\vec{u}=\vec{u}^{\,опт}} = 0,\ i = 1, 2, ..., m \tag{1.57}$$

Ця умова називається також *умовою стаціонарності*, тому що в результаті розв'язання системи (1.57) визначаються всі стаціонарні (у яких можливе існування екстремуму або перегину) точки.

Умова стаціонарності може бути записана також наступним чином:

$$grad\ f(\vec{u}^{опт}) = \nabla f(\vec{u}^{опт}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f(\vec{u}^{опт})}{\partial u_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(\vec{u}^{опт})}{\partial u_m} \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.58)$$

Останній вектор називається *градієнтом* функції $f(\vec{u})$ в точці $\vec{u}^{опт}$. Необхідно відзначити, що градієнт існує для безперервних і диференційованих функцій. Доведено, що градієнт скалярної функції спрямований у бік найшвидшого збільшення функції (найшвидшого підйому) і ортогональний дотичній до лінії рівня $f(\vec{u}_1)$, що проходить через дану точку $\vec{u}_1$. Вектор, протилежний цьому градієнтові (антиградієнт), спрямований у бік найшвидшого спуску.

Умова (1.57) і еквівалентна йому (1.58) не є достатньою, тому що не визначає характер стаціонарної точки, тобто не відповідає на питання, чи знаходиться в ній максимум або мінімум.

Достатня умова оптимальності: для того щоб двічі безперервно диференційована функція $f(\vec{u})$ мала в стаціонарній точці $\vec{u}^{опт}$ безумовний локальний мінімум (максимум), необхідно, щоб матриця її других похідних була ненегативно (непозитивно) визначеною, і досить, щоб вона була позитивно (негативно) визначеною.

Якщо матриця других похідних функції є невизначеною в стаціонарній точці, то ця точка є *сідловою* точкою цієї функції.

Матриця других похідних називається також *матрицею Гессе (гессіаном)* і записується як:

$$H = \nabla^2 f(\vec{u}^{\,onm}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f(\vec{u}^{\,onm})}{\partial u_1^{\,2}} \cdots \dfrac{\partial^2 f(\vec{u}^{\,onm})}{\partial u_1 \cdot \partial u_m} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f(\vec{u}^{\,onm})}{\partial u_n \cdot \partial u_1} \cdots \dfrac{\partial^2 f(\vec{u}^{\,onm})}{\partial u_m^{\,2}} \end{vmatrix} \tag{1.59}$$

Матриця H є позитивно визначеною тоді і тільки тоді, коли квадратична форма $x^T Hx > 0$ для всіх $x \neq 0$, де $x^T = [x_1, x_2, ..., x_n]$.

Матриця H є ненегативно визначеною тоді і тільки тоді, коли квадратична форма $x^T Ax \geq 0$ для всіх x та існує вектор $x \neq 0$, такий, що $x^T Ax = 0$.

Матриця H є негативно визначеною тоді і тільки тоді, коли матриця –H є позитивно визначеною, тобто коли $x^T Hx < 0$ для всіх $x \neq 0$.

Матриця H є непозитивно визначеною тоді і тільки тоді, коли матриця –H є ненегативно визначеною, тобто коли $x^T Hx \leq 0$ для всіх $x \neq 0$.

Матриця H є невизначеною, якщо $x^T Hx$ може приймати як додатні, так і від'ємні значення.

Перевірку знаковизначеності матриць можна здійснити, наприклад, за допомогою *критерію Сильвестра*. Якщо a_{ij} є елементами симетричної матриці розмірності $m \times m$ (1.59), то для позитивної визначеності необхідно і достатньо виконання наступних нерівностей:

$$a_{11} > 0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, ..., \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1m} \\ \vdots \\ a_{m1} \ldots a_{mm} \end{vmatrix} > 0 \tag{1.60}$$

Для ненегативної визначеності необхідно і достатньо:

$$a_{11} \geq 0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \geq 0, ..., \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1m} \\ \vdots \\ a_{m1} \ldots a_{mm} \end{vmatrix} \geq 0 \tag{1.61}$$

Для негативної визначеності необхідно і достатньо:

$$(-1)^1 \cdot a_{11} > 0,\ (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, (-1)^m \cdot \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1m} \\ \vdots \\ a_{m1} \ldots a_{mm} \end{vmatrix} > 0 \tag{1.62}$$

Для непозитивної визначеності необхідно і достатньо:

$$(-1)^1 \cdot a_{11} \geq 0,\ (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \geq 0, \ldots, (-1)^m \cdot \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1m} \\ \vdots \\ a_{m1} \ldots a_{mm} \end{vmatrix} \geq 0 \tag{1.63}$$

1.6. Контрольні завдання

1. Дайте визначення опуклої та увігнутої функції.

2. Нехай дана точка опуклої області задовольняє достатнім умовам існування локального мінімуму опуклої функції, визначеної в цій області. Чи є цей мінімум глобальним?

3. Формалізувати приведені нижче змістовні постановки задачі оптимізації:

а) Визначити оптимальне відношення діаметра і висоти циліндричної ємності, що має при заданій поверхні максимальний об'єм;

б) Визначити оптимальне відношення діаметра і висоти циліндричної ємності без верхньої кришки, що має при заданій поверхні максимальний об'єм;

в) Визначити оптимальні діаметри верхньої та нижньої основ, а також висоту конічної ємності без верхньої кришки, що має при заданій площі поверхні максимальний об'єм;

4. Задано наступні функції однієї змінної:

а) $f(x) = x^5 + x^4 - \left(x^3/3\right) + 2,$

б) $f(x) = (2x+1)^2 (x-4).$

Для кожної з даних функцій знайдіть:

1) інтервали зростання, спадання;
2) точки перегину (якщо такі існують);
3) інтервали, в яких функція увігнута, опукла;
4) локальні и глобальний максимуми (якщо такі існують);
5) локальні и глобальний мінімуми (якщо такі існують).

5. Знайти точки стаціонарності функції та класифікувати їх:

$$f(u_1, u_2) = u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^3 + u_1 .$$

6. Перевірити, чи має функція

$$f(x, y) = xy + 2x^2 - 4y^2$$

сідлову точку на площині x, y.

7. Обчислити значення цільової функції в точці умовного екстремуму:

$$I(u) = (u-1)^2 \to \min_u$$

$$u - 2 \geq 0 .$$

8. Обчислити значення цільової функції в точці умовного екстремуму:

$$I(u) = (u-2)^2 \to \min_u$$

$$u - 1 \leq 0 .$$

9. Обчислити значення цільової функції в точці безумовного екстремуму:

$$I(\vec{u}) = (u_1 - 1)^2 + 2(u_2 - 2)^2 + (u_3 + 1)^2 \to \min_{\vec{u}}$$

10. В задачі 3*а* виразити висоту через діаметр і поверхню ємності, звівши тим самим задачу до максимізації функції однієї змінної. Записати необхідні умови її оптимальності і знайти рішення.

11. Зобразити графічно задачу пошуку умовного екстремуму і знайти рішення:

а)

$$I\left(u_1,u_2\right)=\left(u_1-2\right)^2+\left(u_2-2\right)^2 \to \min_{u_1,u_2}$$

$$u_1-u_2=0;$$

$$u_1\ge 3; u_2\ge 3\,.$$

б)

$$I\left(u_1,u_2\right)=\left(u_1-2\right)^2+2\left(u_2-1\right)^2 \to \min_{u_1,u_2}$$

$$u_1-2u_2=0;$$

$$u_1\ge 2; u_2\ge 1\,.$$

в)

$$I\left(u_1,u_2\right)=\left(u_1-3\right)^2+2u_2^2 \to \min_{u_1,u_2}$$

$$u_1-2u_2=0;$$

$$u_1\ge 4; u_2\ge 1\,.$$